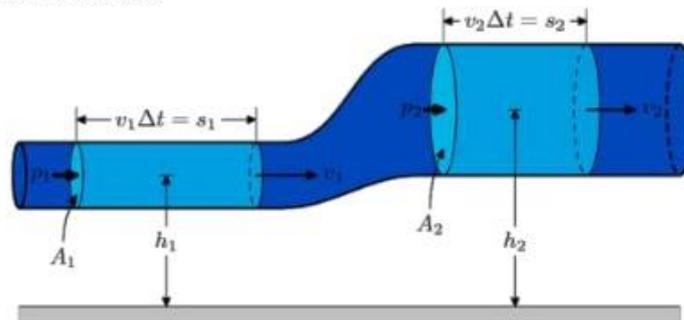


## A EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Exposta por Daniel Bernoulli em seu livro *Hydrodynamica*, a equação relaciona a pressão, a altura e a velocidade de um fluido. Descreve **escoamentos estacionários**, que são escoamentos com movimento constante, e é válida para fluidos **incompressíveis** e **não-viscosos**, ou seja, com massa específica constante e sem resistência ao escoamento. Considerando o eixo de escoamento como  $x$ , conhecida como linha de corrente.



A equação de Bernoulli pode ser deduzida a partir da integração das equações de Euler, ou pela aplicação da lei de conservação de energia, aqui demonstraremos pela conservação de energia, já que não utiliza recursos de Cálculo.

Utilizamos o teorema do trabalho-energia  $W = \Delta Em = \Delta Ec + \Delta Ep_g$ , pela diferença de trabalho feito pelas forças para deslocar a porção de fluido, e reescrevendo o trabalho como  $W = Fs = p A v \Delta t$ , obtemos:

$$F_1 s_1 - F_2 s_2 = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t.$$

Escrevendo a variação da energia potencial como:

$$mgh_1 - mgh_2 = \rho g A_1 v_1 \Delta t h_1 - \rho g A_2 v_2 \Delta t h_2.$$

E escrevendo a variação da energia cinética:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho A_2 v_2 \Delta t v_2^2 - \frac{1}{2} \rho A_1 v_1 \Delta t v_1^2.$$

Substituindo as equações em  $W - \Delta Ep_g = \Delta Ec$ , obtemos:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t + \rho g A_1 v_1 \Delta t h_1 - \rho g A_2 v_2 \Delta t h_2 = \frac{1}{2} \rho A_2 v_2 \Delta t v_2^2 - \frac{1}{2} \rho A_1 v_1 \Delta t v_1^2$$

Como a vazão é constante,  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  e dividindo por  $\rho, \Delta t$  e  $A_1 v_1$ , temos:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Dividindo por  $g$  e como o peso específico  $\gamma = \rho g$ , obtemos por final a equação de Bernoulli:

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

**Condições para aplicação:**

- escoamento estacionário
- fluido não-viscoso
- fluido incompressível
- somente ação do campo gravitacional
- variações isotérmicas

**Exemplos de aplicações:**

Na prática não existem fluidos perfeitos, sem efeito viscoso, entretanto em muitas situações esses efeitos podem ser desprezados.

1) Descarga de reservatórios pressurizados

Muitos fluidos são armazenados em reservatórios pressurizados, como água, gás combustível, ar comprimido, e outros. Como a descarga é controlada por válvulas, pode ser útil determinar a velocidade de descarga. Para determinar tal velocidade utilizamos a equação de Bernoulli, isolando a velocidade:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + 2(h_1 - h_2)}$$

2) Escoamentos através de restrições

Pode haver situações onde há escoamento através de orifícios, para determinar a velocidade de escape, utiliza-se a equação de Bernoulli, com  $h_1 - h_2 = 0$  assim:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Existem muitas outras aplicações como jatos e medidores de velocidades.